第 18 講　定積分と面積

PART1　放物線と x 軸の間の面積

1　[1]　(1)　等式 $\displaystyle\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$ (C は定数) を証明せよ。

(2)　放物線 $y=x^2-2x+1$ と x 軸，および直線 $x=3$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

[2]　(1)　等式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ。

(2)　放物線 $y=x^2-4x-1$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

Point Pickup

曲線 $y=f(x)$ と x 軸, および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれる部分の面積 S は, 区間 $a\leqq x\leqq b$ において

常に $f(x)\geqq 0$ のとき　$\displaystyle S=\int_a^b f(x)dx$

常に $f(x)\leqq 0$ のとき　$\displaystyle S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$

[1]　(2)　$\displaystyle\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$ (C は定数) を用いて，放物線と x 軸の間の面積を求める。

[2]　(2)　$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いて，放物線と x 軸で囲まれる部分の面積を求める。

第18講　PART1　確認問題

1　等式 $\int (x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$（$C$ は定数）を証明せよ。

（証明）

C' を定数とすると

$$\int (x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}x^{\boxed{\text{イ}}}-\alpha x^{\boxed{\text{ウ}}}+\alpha^2x+C'$$

$$=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}\left(\boxed{\text{エ}}\right)+\left(\boxed{\text{オ}}\right)+C'$$

$$=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\left(\boxed{\text{オ}}\right)+C'$$

$\left(\boxed{\text{オ}}\right)+C'$ は定数より

$$\int (x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$$

が成り立つ。

[$\boxed{\text{エ}}$ の選択肢]

① $x^3-2\alpha x^2+2\alpha^2x+3\alpha^3$

② $x^3-2\alpha x^2+2\alpha^2x-3\alpha^3$

③ $x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x+\alpha^3$

④ $x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x-\alpha^3$

[$\boxed{\text{オ}}$ の選択肢]

① α^3　② $-\alpha^3$　③ $\frac{\alpha^3}{3}$　④ $-\frac{\alpha^3}{3}$

2 放物線 $y=-x^2+4x-4$ と x 軸，および直線 $x=-1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

［カ］

3 放物線 $y=3x^2-12x-9$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

［キク］$\sqrt{［ケ］}$

[MEMO]

第 18 講　定積分と面積

PART1　放物線と x 軸の間の面積

1　[1]　(1)　等式 $\int (x-\alpha)^2 dx = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + C$ (C は定数) を証明せよ。

(2)　放物線 $y=x^2-2x+1$ と x 軸，および直線 $x=3$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

[2]　(1)　等式 $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ。

(2)　放物線 $y=x^2-4x-1$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

[1]　(1)　C' を定数とすると

$$\int (x-\alpha)^2 dx = \int (x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx = \frac{1}{3}x^3-\alpha x^2+\alpha^2 x+C'$$

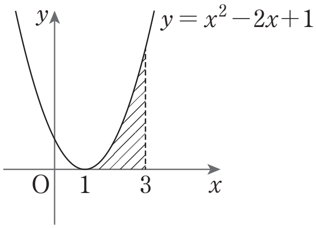
$$=\frac{1}{3}(x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2 x-\alpha^3)+\frac{\alpha^3}{3}+C' = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{\alpha^3}{3}+C'$$

$\frac{\alpha^3}{3}+C'$ は定数であるから　$\int (x-\alpha)^2 dx = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + C$ (C は定数)が成り立つ。

(2)　放物線 $y=x^2-2x+1$ と x 軸の共有点の x 座標は

$x^2-2x+1=0$　　$(x-1)^2=0$　　$x=1$

グラフより，求める面積は



$$\int_1^3 (x^2-2x+1)dx = \int_1^3 (x-1)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3$$

$$=\frac{8}{3}$$

[2]　(1)　$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

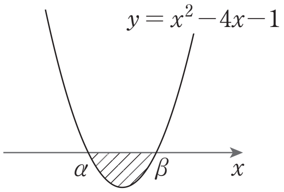
$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2)　放物線 $y=x^2-4x-1$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$x^2-4x-1=0 \quad より \quad x=2\pm\sqrt{5}$$

$\alpha=2-\sqrt{5}$，$\beta=2+\sqrt{5}$ とおくと，

右図より，求める面積は



$$-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-4x-1)dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{5})^3=\frac{20\sqrt{5}}{3}$$

第18講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：3，ウ：2，エ：④，オ：③

[解説]

C' を定数とすると

$$\int (x-\alpha)^2\,dx$$

$$=\int (x^2-2\alpha x+\alpha^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\alpha x^2+\alpha^2 x+C'$$

$$=\frac{1}{3}(\boldsymbol{x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2 x-\alpha^3})+\boldsymbol{\frac{\alpha^3}{3}}+C' \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{\alpha^3}{3}+C'$$

$\dfrac{\alpha^3}{3}+C'$ は定数であるから

$$\int (x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$$

が成り立つ。

[A]　3 次式の因数分解
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

2 [正解] カ：9

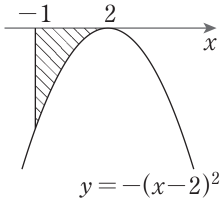
[解説]

放物線 $y=-x^2+4x-4$ と x 軸の共有点の x 座標は

$$-x^2+4x-4=0$$

$$-(x-2)^2=0$$

よって　$x=2$



右図より，求める面積は

$$-\int_{-1}^{2}(-x^2+4x-4)dx \quad \text{[B]}$$

$$=\int_{-1}^{2}(x-2)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{-1}^{2} \quad \text{[C]}$$

$$=-\frac{1}{3}(-1-2)^3$$

$$=9$$

[B]　曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は，区間 $a\leqq x\leqq b$ において

常に $f(x)\geqq 0$ のとき

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

常に $f(x)\leqq 0$ のとき

$$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$$

[C]　積分の公式

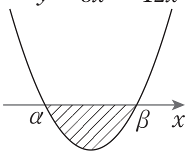
$$\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$$

（C は定数）

3 **[正解]** キク：28，ケ：7

[解説]

放物線 $y=3x^2-12x-9$ と x 軸の共有点の x 座標は



$$3x^2-12x-9=0$$

より　$x=2\pm\sqrt{7}$

$\alpha=2-\sqrt{7}$，$\beta=2+\sqrt{7}$ と

とおくと，右図より，求める面積は

$$-\int_\alpha^\beta \left(3x^2-12x-9\right)dx$$

$$=-3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-3\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$ [D]

$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{7})^3$$

$$=28\sqrt{7}$$

[D]　積分の公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$